Chapitre : Exercices sur les séries

1 Convergence de séries à termes positifs

Exercice 1 ★ Majorations et équivalents - 1 –

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3.** $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ **6.** $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$ **8.** $u_n = \dfrac{n+1}{2^n+8}$ **9.** $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$

Indication ▼ Correction ▼ [1109]

Exercice 2 ★★★ Équivalents et majorations - 2 –

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}_+$ **3.** $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}.$ **5.** $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6.** $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

7. $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}.$

Indication ▼ Correction ▼ [1110]

Exercice 3 ★★ Avec des paramètres - 1 –

Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n},\ a,b \in \mathbb{R}$ **2.** $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - a - \dfrac{b}{n},\ a,b \in \mathbb{R}.$

3. $\dfrac{1}{an+b} - \dfrac{c}{n},\ a,b,c \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0)$

Indication ▼ Correction ▼ [1113]

Exercice 4 ★★★★ Avec des paramètres - 3 –

Déterminer en fonction des paramètres la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha},\ \alpha \geq 0$ **2.** $\dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Indication ▼ Correction ▼ [1114]

Exercice 5 ★★★ Inclassables –

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :
1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, avec $a > 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1116]

Exercice 6 ★★ **Cas limite de la règle de d'Alembert –**

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Indication ▼ Correction ▼ [1117]

Exercice 7 ★★★ **Cas limite de la règle de d'Alembert –**

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$. Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n ? Montrer que la suite (nu_n) est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$. Quelle est la limite de v_{n+1}/v_n ? Montrer que, si $1 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.

Indication ▼ Correction ▼ [1118]

Exercice 8 ★★★ **Un cran au-dessus –**

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ **2.** $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$

3. $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}/n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1119]

Exercice 9 ★★★★ **Série des inverses des nombres premiers –**

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right).$$

4. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$?
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?

Indication ▼ Correction ▼ [1120]

Exercice 10 ★★★★★ **Entiers sans 9 –**

On note A l'ensemble des entiers naturels non-nuls dont l'écriture (en base 10) ne comporte pas de 9. On énumère A en la suite croissante (k_n). Quelle est la nature de la série $\sum_n \frac{1}{k_n}$?

Indication ▼ Correction ▼ [1122]

Exercice 11 ★ **Produit de racines carrées et maximum –**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1167]

Exercice 12 ★ **Avec une puissance –**

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.
1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Indication ▼ Correction ▼ [1168]

Exercice 13 ★★ **Deux séries de même nature** –

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
1. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Indication ▼ Correction ▼ [1169]

Exercice 14 ★★ **Terme général positif et décroissant** –

Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors (nu_n) tend vers 0.

Indication ▼ Correction ▼ [1170]

Exercice 15 ★★★ **Condensation...** –

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Indication ▼ Correction ▼ [1172]

Exercice 16 ★★★ **Règle de Raabe-Duhamel** –

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1,a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.
5. Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
6. En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Indication ▼ Correction ▼ [1174]

2 Convergence de séries à termes quelconques

Exercice 17 ★ **Pour commencer !** –

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\textbf{1.}\ u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \qquad \textbf{2.}\ u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$
$$\textbf{3.}\ u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$$

Indication ▼ Correction ▼ [1125]

Exercice 18 ★ **Convergence absolue** –

Soit $f : [0,1] \to$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Indication ▼ Correction ▼ [1126]

Exercice 19 ★★ **Une erreur classique... –**

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Indication ▼ Correction ▼ [1127]

Exercice 20 ★★★ **Décomposition –**

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ **2.** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$, $\alpha>0$

3. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1128]

Exercice 21 ★★★ **En deux étapes –**

Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n},$$

où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1129]

Exercice 22 ★★★★ **Discussion suivant un paramètre –**

Suivant la position du point de coordonnées (x,y) dans le plan, étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{x^n}{y^n+n}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1130]

Exercice 23 ★★★ **Reste d'une série alternée –**

On fixe $\alpha>0$ et on pose $u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^\alpha}$. Le but de l'exercice est démontrer que la série de terme général u_n converge.

1. Soit $n \geq 1$ fixé. On pose

$$v_p = \frac{1}{(p+n)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha}.$$

Démontrer que la suite (v_p) décroît vers 0. En déduire la convergence de $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p v_p$. Quel est le signe de sa somme ?

2. En appliquant le critère des séries alternées, démontrer que la série de terme général (u_n) converge.

Indication ▼ Correction ▼ [1131]

Exercice 24 ★★★★ **Transformation d'Abel –**

On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = s_n v_n - s_0 v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite (s_n) est bornée, et si la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_n v_n$ est convergente.

3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1132]

Exercice 25 ★★★★★ **Un cran au-dessus ! –**

Étudier les séries de terme général :

1. $u_n = \sin(\pi e n!)$ et $v_n = \sin\left(\frac{\pi}{e} n!\right)$.
2. $u_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^{\alpha}}$, pour $\alpha \in$.

Indication ▼ Correction ▼ [1136]

3 Comparaison à une intégrale

Exercice 26 ★ **Somme partielle des séries de Riemann –**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1137]

Exercice 27 ★ **Reste d'une série de Riemann –**

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

1. Soit $a > 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^{\alpha}}.$$

2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Indication ▼ Correction ▼ [1138]

Exercice 28 ★★ **Où sont les séries ? –**

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1139]

Exercice 29 ★★★ **Séries de Bertrand –**

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.

3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.

Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente. Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$. Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

4. Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.

5. Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.

6. Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ [1115]

Exercice 30 ★★★★ Somme de logarithmes –

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Indication ▼ Correction ▼ [1155]

Exercice 31 ★★★★ Trouver une limite –

Déterminer $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1141]

Exercice 32 ★★★ Comparaison à une intégrale –

Soit f une application croissante, continue et positive de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = f(e^{-n})$ et $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. Démontrer que la convergence de la série $\sum_n u_n$ est équivalente à la convergence d'une intégrale impropre. Faire de même pour la série $\sum_n v_n$. En déduire que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_n v_n$ converge.

Indication ▼ Correction ▼ [1177]

Exercice 33 ★★★★ Une convergence étonnante –

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Indication ▼ Correction ▼ [1143]

4 Calcul de sommes

Exercice 34 ★★ Série télescopique... –

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Indication ▼ Correction ▼ [1144]

Exercice 35 ★★ Avec des exponentielles –

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \mathbf{2.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \mathbf{3.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1146]

Exercice 36 ★★★ **Série harmonique alternée** –

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.

2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Indication ▼ Correction ▼ [1147]

Exercice 37 ★★★★ **Élimination imprévue** –

Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1149]

Exercice 38 ★★★ **Série des restes** –

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. Montrer que $nv_n \to 0$.
2. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n$.
3. Application : pour $|r| < 1$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [1171]

5 Estimation des sommes partielles et du reste

Exercice 39 ★ **Série alternée** –

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1151]

Exercice 40 ★★★ **Très vite !** –

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Indication ▼ Correction ▼ [1152]

Exercice 41 ★★★★ **Développement asymptotique de la série harmonique** –

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k\geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1153]

Exercice 42 ★★★★ **Somme et développement asymptotique de la série des inverses des carrés** –

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En déduire que

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

4. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

5. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

6. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

7. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes que

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1154]

Exercice 43 ★★★★ **Décroissance très rapide à l'infini** –

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que f'/f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série $\sum_n f(n)$ converge et donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k \geq n} f(k)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1156]

Exercice 44 ★★★★★ **Reste de certaines séries alternées** –

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0, et on considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son reste. On suppose de plus que la suite (u_n) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
3. En déduire que $R_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1875]

Exercice 45 ★★★★★ **Série divergente divisée –**

Soit (a_n) une suite de réels strictement positive. On suppose que la série de terme général a_n est divergente, et on note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, $b_n = a_{n+1}/S_n$. Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

Indication ▼ Correction ▼ [1180]

6 Applications

Exercice 46 ★★★ **Formule de Stirling –**

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1160]

Exercice 47 ★★★ **Relation suite/série –**

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on pose

$$v_n = \ln\left((n+1)^\beta u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta u_n\right).$$

1. Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général v_n ?
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^\star$ pour lequel $u_n \sim_{+\infty} An^\alpha$.

Indication ▼ Correction ▼ [1161]

Exercice 48 ★★★ **Estimation asymptotique d'un produit –**

Soit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \sim_{+\infty} \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1164]

Exercice 49 ★★★ **Étude d'une suite récurrente –**

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour $n \geq 0$.

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que u_{n+1}/u_n tend vers 1. Calculer la limite de $\frac{u_n + u_{n+1}}{u_n}$.
3. Montrer que $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers 1/6.
4. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers 1/3.
5. Montrer que l'on a $\lim(\sqrt{n}u_n) = \sqrt{3}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1162]

Exercice 50 ★★★★ **Irrationalité** –

On rappelle que $\cos(1)$ est défini par la série $\cos(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ [1163]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Comparer à une série de Riemann.
2. Comparer à une série de Riemann.
3. Quelle est la limite du terme général ?
4. Utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
5. Comparer à une série de Riemann.
6. $n! \geq 2^{n-1}$.
7. Utiliser un équivalent à une série géométrique
8. Trouver un équivalent et majorer par une série géométrique.
9. Minorer par une série de Riemann divergente.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

Faire un développement limité du terme général, puis discuter suivant ce qui se passe.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Effectuer un développement limité du terme général.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Se ramener à la somme des $1/k^2$, pour des bornes bien choisies.
2. Utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou faire un développement limité de arctan au voisinage de $+\infty$ en utilisant la formule $\arctan(x)+\arctan(1/x)=\pi/2$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Appliquer la règle de D'Alembert. Pour la deuxième question, faire un développement limité de u_{n+1}/u_n.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Le calcul de la limite est clair. Calculer ensuite $(n+1)u_{n+1}/nu_n$. Montrer que la série est plus grande que $1/n$.
2. Le calcul de la limite est clair. Faire ensuite le calcul de $(n+1)^\alpha v_{n+1}/n^\alpha v_n$, et faire le développement limité. Si n_0 est un rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée, prouver que :

$$\forall n \geq n_0,\ v_{n+1} \leq v_{n_0} \frac{n_0^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

Prendre ensuite $\alpha \in]1,3/2[$ pour conclure.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Il faut estimer le terme général de la série. Estimer le numérateur par exemple à l'aide d'une comparaison à une intégrale, et le dénominateur ou par une estimation grossière, ou par une comparaison à une intégrale également.
2. Majorer le terme à l'intérieur de l'intégrale.
3. Discuter suivant la position de α par rapport à 0.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Il suffit de composer les limites, en vérifiant que si (V_n) converge, sa limite est strictement positive.
2. Écrire $\ln(V_n)$ comme la somme partielle d'une série, et trouver un équivalent simple du terme général de cette série.

3. Il s'agit juste de l'identité $\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$.

4. Dans le développement du produit précédent, on fait apparaitre les termes $1/j$, avec j n'importe quel entier qui s'écrit $p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$.

5. Résumer les questions précédentes.

6. Distinguer $\alpha > 1$ et $\alpha \leq 1$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Poser $A_N = A \cap \{10^N, \dots, 10^{N+1} - 1\}$, et majorer le nombre d'éléments de A_N.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Majorer ! ! !

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. $u_n^\alpha \leq u_n$...

2. Dans l'autre sens, en tout cas si $u_n \to 0$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Étudier la fonction.

2. Distinguer les cas $u_n \to 0$ et (u_n) ne tend pas vers 0.

Indication pour l'exercice 14 ▲

S'inspirer de la preuve que la série $\sum_n 1/n$ est divergente.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Utiliser l'inégalité

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \dots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Calculer v_{n+1}/v_n puis en déduire que $v_n \geq C u_n$ pour une constante $C > 0$ bien choisie.

2. Prendre $b \in]a, 1[$ et procéder comme à la première question.

3. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^b}$ converge si et seulement si $b > 1$. Que dire de u_{n+1}/u_n.

4. Remplacer u_{n+1}/u_n par son développement limité... La série de terme général w_n converge.

5. Remplacer u_{n+1}/u_n par son développement limité...

6. La série de terme général w_n converge.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Convergence absolue.

2. Critère spécial des séries alternées.

3. Se ramener au critère des séries alternées.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Étudier la convergence absolue. Utiliser le fait que f est bornée sur $[0, 1]$.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées.

2. Faire un développement limité en mettant $\sqrt{n}$ en facteur au dénominateur.

3. Le terme général de la série s'écrit comme la somme de 2 suites. La série associée à l'une de ces suites est convergente et l'autre est divergente. Que conclure ?

4. On a deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Faire un développement limité du terme général, jusqu'à trouver une terme à signe constant, ou jusqu'à trouver un terme négligé qui est absolument convergent. Etudier alors les séries juste avant individuellement. Si toutes les séries convergent, la série initiale convergera. Si toutes les séries convergent sauf une, la série initiale divergera. Attention aux pièges suivants :

Utiliser le critère des séries alternées pour la série de départ. Ecrire que le terme général est équivalent au terme général d'une série qui n'est pas de signe constant.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Séparer les cas $|b| \leq 1$ et $|b| > 1$. Trouver un équivalent facile de la suite (u_n), puis étudier la série associée.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Se ramener à l'étude d'une fonction.

2. Utiliser la question précédente pour démontrer que $|u_n|$ tend vers 0.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Partir du terme de gauche et écrire que $u_k = s_k - s_{k-1}$.

2. Démontrer la convergence absolue de $\sum_k s_k(v_k - v_{k+1})$.

3. En utilisant la question précédente, il suffit de prouver que la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$$

est bornée. Pour cela, on écrit $\sin(k\theta) = \Im m(e^{ik\theta})$ et on utilise la somme d'une série géométrique.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Ecrire e comme somme d'une série de factorielles. Séparer ensuite l'étude des premiers termes (qui divisent $n!$) des seconds.

2. Il y a d'abord des cas faciles à éliminer. Pour les autres cas, regrouper les termes pour lesquels $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sont égales à une constante ; certains cas se simplifient encore par le critère de Cauchy. Pour les autres, il faut prouver qu'on a le droit au regroupement.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Comparer à une intégrale ! Pour la première question, on séparera les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Il suffit d'intégrer.

2. Comparer à une intégrale.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Écrire

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

puis comparer à une intégrale.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Comparer avec $\frac{1}{n^\gamma}$ pour $1 < \gamma < \alpha$.
2. Comparer avec $\frac{1}{n}$.
3. Comparer à $\frac{1}{n}$. On peut trouver une primitive de la fonction à intégrer (attention au cas où $\beta = 1$!). Comparaison à une intégrale.
4. Comparer à $\frac{1}{n}$.
5. On peut trouver une primitive de la fonction à intégrer (attention au cas où $\beta = 1$!).
6. Comparaison à une intégrale.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Écrire

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1)$$

puis sommer ces inégalités. L'intégrale se calcule en intégrant par parties.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Encadrer la somme par comparaison à une intégrale, pour tout $a \in \mathbb{R}$, puis passer à la limite...

Indication pour l'exercice 32 ▲

Les fonctions $x \mapsto f(e^{-x})$ et $x \mapsto \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont décroissantes.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Comparer à une intégrale $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ en écrivant $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Écrire la somme de façon étendue, et voir que de nombreuses simplifications ont lieu (on peut aussi utiliser des changements d'indice).

Indication pour l'exercice 35 ▲

Pour les termes du type n^p, on les écrira en fonction de $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ pour que les simplifications se passent bien !

Indication pour l'exercice 36 ▲

Prouver par récurrence que la dérivée n-ième de $f(t) = \ln(1+t)$ est :

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

Pour 2, faire la somme dans l'intégrale (série géométrique), et permuter limite et intégrale.

Indication pour l'exercice 37 ▲

Utiliser des formules sur la fonction $\tan(a-b) = \ldots$ pour écrire le terme général de cette série comme différence du terme général de deux autres séries.

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Majorer $|nv_n|$ par l'inégalité triangulaire puis utiliser que $\sum_n n|u_n|$ converge.
2. Exprimer $\sum_{n=1}^{N} v_n$ en fonction de $\sum_{n=1}^{N} nu_n$, et d'un autre terme.
3.

Indication pour l'exercice 39 ▲

Comment majorer le reste d'une série alternée ?

Indication pour l'exercice 40 ▲

1. Appliquer un critère bien choisi.
2. Montrer que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}$.
3. Chercher n pour que $R_n < 0,001$.

Indication pour l'exercice 41 ▲

1. Comparer à une intégrale, c'est-à-dire utiliser que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. Faire un développement limité de v_n pour étudier sa convergence. Puis relier la somme partielle de v_n à u_n.
3. On pourra comparer à une intégrale.
4. A la question précédente, on a trouvé un équivalent de t_n. En déduire un équivalent du reste en utilisant le théorème de sommation des relations de comparaison. On revient à w_n en remarquant que $\sum_{k=n}^{N} t_n = w_{N+1} - w_n$.

Indication pour l'exercice 42 ▲

1. Intégrer $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$ pour $t \in [k, k+1]$. Sommer pour k allant de n à $+\infty$.
2. Intégrer $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$ pour $t \in [k, k+1]$.
3. Sommer pour k allant de n à $+\infty$.
4. Faire une intégration par parties.
5. Ecrire que $\cos(nt) = \Re e(e^{int})$.
6. Calcul par double IPP.
7.
8.

Indication pour l'exercice 43 ▲

La première chose à faire est d'intégrer f'/f pour obtenir des estimations de f. On pourra ensuite prouver que R_n est équivalent à $f(n)$.

Indication pour l'exercice 44 ▲

1. On connait le signe de R_n !
2. Calculer $|R_{n+1}| - |R_n|$, regrouper les termes astucieusement et utiliser une des propriétés de la suite (u_n).
3. Commencer par un équivalent de $|R_n|$.

Indication pour l'exercice 45 ▲

Se convaincre de sa nature sur des exemples. Ensuite, évaluer $\sum_{k=n}^{b} b_k$ où n est arbitrairement grand et p est tel que $S_p \leq 2S_n$, $S_{p+1} > 2S_n$.

Indication pour l'exercice 46 ▲

Faire un développement limité de v_n pour en déterminer la nature. On doit trouver :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le retour à la suite (u_n) se fait en remarquant que $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. La somme partielle de la série $\sum_n v_n$ s'exprime donc facilement en fonction de $\ln(u_n)$.

Indication pour l'exercice 47 ▲

1. Écrire v_n comme le logarithme d'un quotient, et faire un développement limité.
2. La série correspond à une somme "télescopique".

Indication pour l'exercice 48 ▲

Prendre le logarithme, faire un développement limité du terme général, prendre la somme, etc...

Indication pour l'exercice 49 ▲

1. C'est une étude classique d'une suite récurrente. Montrer, en étudiant la fonction sinus, que la suite est décroissante minorée.
2. Utiliser que $\sin u_n \sim u_n$.
3. Utiliser le développement limité du sinus au voisinage de 0.
4. Utiliser les deux questions précédentes.
5. Utiliser le fait que si $v_n \sim w_n$, avec $w_n \geq 0$, si la série de terme général w_n diverge, la série de terme général v_n diverge elle aussi et les sommes partielles sont équivalentes.

Indication pour l'exercice 50 ▲

Utiliser le critère des séries alternées pour encadrer $\cos(1)$, puis prouver que $(4n-2)!\cos(1)$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On a

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

2. Le raisonnement est identique :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

3. On a $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$ (rappelons que $\sin x \sim_0 x$) et la série est grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$

et la série est donc divergente par comparaison à une série de Riemann divergente.

5. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc

$$\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

6. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre aisément par récurrence par exemple). On en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, la série converge.

7. Il est facile de vérifier que $3^n + n^4 \sim_{+\infty} 3^n$ et que $5^n - 2^n \sim_{+\infty} 5^n$. On en déduit que

$$\frac{3^n+n^4}{5^n-2^n} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente (tout est positif), on en déduit que la série converge.

8. Il est facile de vérifier que $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{2^n}$. Or la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, par croissance comparée des polynômes et des puissances, on sait que

$$\frac{n}{(1.5)^n} \leq 1$$

pour n assez grand, et donc que

$$\frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{1.5}{2}\right)^n.$$

Puisque $1.5/2 < 1$, on sait que $\sum \left(\frac{1.5}{2}\right)^n$ est convergente. On peut aussi utiliser la règle de D'Alembert pour prouver la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{n}{2^n}$. En effet, $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n} \to 1/2 < 1.$$

9. On sait que

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n^2+1)} = \frac{\sqrt{n}}{2\ln(n)+\ln(1+n^{-2})} \to +\infty.$$

En particulier, pour n assez grand,

$$\frac{1}{\ln(n^2+1)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On écrit $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \exp(-\sqrt{n}\ln 2)$ et on en déduit :

$$n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - \sqrt{n}\ln 2\right) = \exp\left(-\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Il résulte de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ que

$$\lim_{n\to+\infty} -\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$$

soit par composition des limites

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0,$$

ou encore $u_n = o(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. Par croissance comparée des suites géométriques et de la suite factorielle, le terme général ne tend pas vers 0, sauf si $a = 0$. La série $\sum_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a = 0$.

3. On écrit tout sous forme exponentielle :

$$ne^{-\sqrt{n}} = \exp(\ln n - \sqrt{n}).$$

On a alors

$$\frac{\exp(\ln n - \sqrt{n})}{\exp(-2\ln n)} = \exp(3\ln n - \sqrt{n}) \to 0$$

et donc

$$ne^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série est convergente.

4. On vérifie aisément que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2\ln n}{(4/\sqrt{2})^n}.$$

Puisque $4/\sqrt{2} > 2$, on obtient

$$u_n =_{+\infty} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

et donc la série est convergente.

5. On remarque que $0 < \ln(e^n - 1) \leq \ln(e^n) = n$. Ainsi, pour $n \geq 3$,

$$u_n \geq \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n},$$

et donc la série de terme général u_n diverge.

6. On a

$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \to \exp(0) = 1.$$

Ainsi, $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et la série est divergente.

7. Le numérateur et le dénominateur s'écrivent comme des produits faisant apparaître chacun $3n$ facteurs. On a de plus

$$\begin{aligned}\frac{1\times\cdots\times n\times 1\times\cdots\times n\times 1\times\cdots\times n}{1\times\cdots\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)\times(2n+1)\times\cdots\times(3n)} &\leq \frac{1\times\cdots\times n}{(2n+1)\times\cdots\times(3n)}\\ &\leq \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\sum 2^{-n}$ converge, on en déduit par comparaison que $\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ converge.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On réalise un développement limité du terme général :

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \to (1-a) \neq 0$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \sim_{+\infty} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

2. Avec un raisonnement similaire, en notant u_n le terme général,

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n} = (1-a) - \frac{b}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $u_n \to 1 - a \neq 0$ et la série diverge (grossièrement). Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-b}{n}$ et par comparaison à une série de Riemann divergente, la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^2}$ et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge. Dans ce cas, la série converge donc si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$.

3. Remarquons d'abord que si $b = 0$, alors le terme général de la série est $\left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n}$ et donc que la série converge si et seulement si $ac = 1$. Supposons maintenant $b \neq 0$. Si $a = 0$, le terme général de la série tend vers $\frac{1}{b} \neq 0$ et donc la série diverge grossièrement. On peut donc supposer que $a =\neq 0$. Dans ce cas, un développement limité donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} &= \frac{1}{an}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{an}}\right) - \frac{c}{n} \\ &= \frac{1}{an}\left(1 - \frac{b}{an}\right) - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n} - \frac{b}{a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Si $ac \neq 1$, alors le terme général est équivalent à $\left(\frac{1}{a} - c\right)\frac{1}{n}$ et donc on a divergence par comparaison à une série de Riemann divergente. Si $ac = 1$, alors le terme général est équivalent à $\frac{b}{a^2n^2}$ et on a convergence par comparaison à une série de Riemann convergente. En résumé, on a convergence si et seulement si $ac = 1$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On passe bien sûr à l'écriture en fonction du logarithme et de l'exponentielle, puis on écrit le développement limité du sinus et du logarithme. On obtient :

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)\right).$$

Trois cas sont à distinguer :

Si $\alpha < 2$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^{2-\alpha}} = 0$, donc $\lim u_n = 1$: la série de terme général u_n est grosièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0). Si $\alpha = 2$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1/6}$ qui est un réel non nul, ce qui prouve que la série de terme général u_n est grosièrement divergente. Si $\alpha > 2$, on a :

$$n^2 u_n = \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}}\left(1 - 12\frac{\ln n}{n^{\alpha-2}} + o(1)\right)\right) \to 0,$$

et par conséquent la série $\sum u_n$ converge.

2. Si $\alpha < 2$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^{2-\alpha}} = 0$, donc $\lim u_n = 1$: la série de terme général u_n est grosièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

3. Si $\alpha = 2$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-1/6}$ qui est un réel non nul, ce qui prouve que la série de terme général u_n est grosièrement divergente.

4. Si $\alpha > 2$, on a :

$$n^2 u_n = \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-\alpha}}\left(1 - 12\frac{\ln n}{n^{\alpha-2}} + o(1)\right)\right) \to 0,$$

et par conséquent la série $\sum u_n$ converge.

5. Il faut faire un développement limité du terme général. On a :

$$(n+1)^{1+1/n} = n^{1+1/n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+1/n} = ne^{\frac{\ln n}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit :

$$(n+1)^{1+1/n} = n + \ln n + o(\ln n).$$

De même,

$$(n-1)^{1-1/n} = n - \ln n + o(\ln n).$$

Finalement, on obtient que :

$$u_n \sim \frac{2\ln n}{n^\alpha}.$$

D'après l'étude des séries de Bertrand, cette série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour tout entier naturel N, on a :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2}.$$

La suite (S_N) est donc croissante, et majorée par la somme de la série convergente $\sum_1^\infty 1/k^2$. On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$0 \le u_n \le \frac{a}{1+n^2}.$$

La série à terme général positif $\sum u_n$ est convergente.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Cette série est bien adaptée à l'utilisation de la règle de d'Alembert. On calcule donc

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} \\
&= a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= a\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= a\exp\left(-n\times\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc que u_{n+1}/u_n converge vers a/e. Par application de la règle de d'Alembert, si $a > e$, la série est divergente. Si $a < e$, la série est convergente. Le cas $a = e$ est un cas limite où le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure directement.

2. On pousse un peu plus loin le développement précédent. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= e\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

En particulier, pour n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. Elle ne converge donc pas vers zéro, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1-\frac{1}{2n+2}.$$

La suite u_{n+1}/u_n converge donc vers 1. En outre, on a :

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1.$$

Par conséquent, la suite (nu_n) est croissante, et comme (u_n) est positive, on a :

$$nu_n \geq u_1 \implies u_n \geq \frac{u_1}{n}.$$

La série de terme général (u_n) est divergente (minorée par une série divergente).

2. On a de même :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2} \to 1.$$

D'autre part, un calcul immédiat montre que :

$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\left(1-\frac{3}{2n+2}\right).$$

Effectuons un développement limité de cette quantité au voisinage de $+\infty$ afin d'obtenir la position par rapport à 1. On a :

$$\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} = 1+\frac{2\alpha-3}{2n+2}+o(1/n).$$

Pour n assez grand, $\frac{(n+1)^\alpha v_{n+1}}{n^\alpha v_n} - 1$ a le signe de $\frac{2\alpha-3}{2n+2}$, qui est négatif puisqu'on a supposé $\alpha < 3/2$. Soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est vraie. On a, pour $n > n_0$:

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n_0}} &= \frac{v_n}{v_{n-1}}\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\cdots\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}\\ &\leq \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{(n-2)^\alpha}{(n-1)^\alpha}\cdots\frac{n_0^\alpha}{(n_0+1)^\alpha}\\ &\leq \frac{n_0^\alpha}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$0 \leq v_n \leq v_{n_0}\frac{n_0^\alpha}{n^\alpha}.$$

Prenons maintenant $\alpha \in]1,3/2[$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général (v_n) converge. On vient donc de voir deux phénomènes très différents de ce qui peut se passer dans le cas limite de

la règle de d'Alembert. Le second résultat est un cas particulier de ce que l'on appelle règle de Raabe-Duhamel.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Il faut savoir que la suite des sommes partielles de la série harmonique est équivalente à $\ln n$. On utilise ici seulement la minoration, qui se démontre très facilement par comparaison à une intégrale :

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1).$$

On peut obtenir une estimation précise du dénominateur également en faisant une comparaison à une intégrale. Le plus facile est toutefois d'utiliser la majoration brutale suivante :

$$\ln(n!)=\ln(1)+\cdots+\ln(n)\leq n\ln n.$$

Il en résulte que $u_n\geq\frac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ est divergente.

2. On majore sous l'intégrale. En utilisant $\sin x\leq x$, on obtient (on suppose $n\geq 2$) :

$$0\leq u_n\leq\int_0^{\pi/n}\frac{x^3}{1+x}dx\leq\int_0^{\pi/n}x^3dx\leq\frac{\pi^4}{4n^4}.$$

La série $\sum u_n$ est convergente.

3. Remarquons d'abord que $u_n>0$ pour tout entier n. Supposons d'abord $\alpha>0$. Alors, puisque $e^{-u_n}\leq 1$, la suite (u_n) converge vers 0, et donc $e^{-u_n}\to 1$. Il vient $u_n\sim_{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, et donc la série converge si et seulement si $\alpha>1$. Supposons maintenant $\alpha\leq 0$. Alors la suite (u_n) ne peut pas tendre vers 0. Si c'était le cas, on aurait $u_{n+1}=e^{-u_n}/n^\alpha\geq e^{-u_n}\geq e^{-1/2}$ dès que n est assez grand, contredisant la convergence de (u_n) vers 0. Ainsi, la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Si la suite (V_n) est convergente, notons v sa limite. Il est clair que $v\geq 1$ puisque, pour chaque k, $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\geq 1$. Alors, par composition des limites, $(\ln(V_n))$ converge vers $\ln(v)$ (le point clé est ici de remarquer que v est strictement positif, pour que $(\ln(V_n))$ admette bien une limite finie). La réciproque se prouve en composant avec l'exponentielle.

2. Étudions donc la suite $(\ln(V_n))$. On a

$$\ln(V_n)=\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)=\sum_{k=1}^{N}-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Dire que la suite $(\ln(V_n))$ est convergente équivaut donc à dire que la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ est convergente. Mais on a

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{p_k}.$$

Puisque $\frac{1}{p_k}$ est positif, alors la convergence de la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ est équivalente à la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$. Ainsi, utilisant le résultat de la première question, la suite (V_n) converge si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$ converge.

3. Il suffit de remarquer que $0<\frac{1}{p_k}<1$ pour tout entier k et donc que, d'après la formule pour une somme géométrique, on a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=\sum_{j\geq 0}\frac{1}{p_k^j}.$$

4. Il y a deux observations à faire :

pour tout $1 \leq j \leq n$, le développement en facteurs premier de j ne fait apparaître que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n : $j = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ avec $n \leq p_n$ (dans cette écriture, certains α_i peuvent être nuls). Lorsque l'on développe le produit

$$(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots)(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots)\cdots(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\cdots)$$

on se retrouve avec la somme $\sum_{\alpha_1=0}^{+\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}}$.

En combinant les deux observations, on remarque qu'on obtient au moins tous les termes de la forme $j \leq n$, d'où l'inégalité annoncée.

5. pour tout $1 \leq j \leq n$, le développement en facteurs premier de j ne fait apparaître que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n : $j = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ avec $n \leq p_n$ (dans cette écriture, certains α_i peuvent être nuls).

6. Lorsque l'on développe le produit

$$(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots)(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots)\cdots(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\cdots)$$

on se retrouve avec la somme $\sum_{\alpha_1=0}^{+\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}}$.

7. D'après la question précédente, puisque la série $\sum_j \frac{1}{j}$ est divergente, il en est de même de la suite (V_n). Ceci entraine la divergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$.

8. Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \geq \frac{1}{p_k}$. On en déduit que la série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est divergente. Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. La série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est alors convergente.

Correction de l'exercice 10 ▲

On note $A_N = A \cap \{10^N, \ldots, 10^{N+1}-1\}$. Chaque élément de A_N comporte $N+1$ chiffres, et chaque chiffre doit être compris entre 0 et 8. Ainsi, le cardinal de A_N est inférieur ou égal à 9^{N+1}. On en déduit :

$$\sum_{k\in A_N}\frac{1}{k} \leq \frac{9^{N+1}}{10^N} \leq 9\times\frac{9^N}{10^N}.$$

Posons $M = 9\sum_{n\geq 0}\frac{9^n}{10^n}$. Alors, soit n et entier et N tel que $k_n \in A_N$. On a

$$\sum_{j\leq n}\frac{1}{k_j} \leq \sum_{j=0}^{N}\sum_{k\in A_j}\frac{1}{k} \leq \sum_{j=0}^{N} 9\times\frac{9^j}{10^j} \leq M.$$

La série est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle est donc convergente !

Correction de l'exercice 11 ▲

On a $(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2 \geq 0$ ce qui prouve que $0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n+v_n)$. Par majoration d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente. D'autre part, on a $0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ (le maximum est toujours égal à l'un ou l'autre, donc inférieur ou égal à la somme des deux puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs). Pour la même raison, la série $\sum_n \max(u_n, v_n)$ converge.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, la suite (u_n) converge vers zéro. Il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que, pour $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha > 1$, on a alors, pour $n \geq N$, $0 \leq u_n^\alpha \leq u_n$. Puisque l'on travaille avec des séries à termes positifs, ceci entraine la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n^\alpha$.

2. Deux cas sont possibles :

ou bien (u_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas, la suite (u_n^α) ne converge pas non plus vers 0, et donc la série $\sum_n u_n^\alpha$ diverge ; ou bien (u_n) converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha \in]0,1[$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq u_n^\alpha$.

Ainsi, la série $\sum_n u_n^\alpha$ est aussi divergente.

3. ou bien (u_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas, la suite (u_n^α) ne converge pas non plus vers 0, et donc la série $\sum_n u_n^\alpha$ diverge ;

4. ou bien (u_n) converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha \in]0,1[$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq u_n^\alpha$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Il suffit d'étudier la fonction. Sa dérivée est $x \mapsto 1/(1+x)^2 \geq 0$, donc la fonction est croissante.

2. On distingue deux cas : si (u_n) tend vers 0, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$, et ces deux suites sont positives. Par le critère d'équivalence, on en déduit que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont la même nature. Si (u_n) ne tend pas vers 0 (ce qui implique que $\sum_n u_n$ diverge), alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq \varepsilon$ (rappelons que $u_n \geq 0$). Mais alors, d'après la première question, on a $v_n \geq \varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$, et donc la suite (v_n) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_n v_n$ est aussi divergente, et dans ce cas, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont bien la même nature.

Correction de l'exercice 14 ▲

Procédons par l'absurde. On suppose donc que (nu_n) ne tend pas vers 0. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $q \geq N$ avec $qu_q \geq \varepsilon$. Autrement dit, on a $u_q \geq \varepsilon/q$. Puisque (u_n) est décroissante, on a encore $u_k \geq \varepsilon/q$ pour tout $k \leq q$. Posons $p = \lfloor q/2 \rfloor$, de sorte que $p \geq \lfloor N/2 \rfloor$ et $2p - p \geq \frac{q}{2} - 1$. Alors

$$\sum_{k=p}^{2p} u_k \geq \sum_{k=p}^{2p} \frac{\varepsilon}{q} \geq \frac{q}{2} \times \frac{\varepsilon}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant p_N l'entier p construit pour le choix de N, la suite (p_N) tend vers $+\infty$, et on a pour tout entier N,

$$\sum_{k=p_N}^{2p_N} u_k \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si la série convergeait, ce serait le cas de la suite des sommes partielles $S_p = \sum_{k=1}^{p} u_k$ et on devrait avoir

$$\sum_{k=p_N}^{2p_N} u_k = S_{2p_N} - S_{p_N - 1} \to 0.$$

On obtient deux résultats contradictoires. L'hypothèse de départ est fausse, et donc (nu_n) tend vers 0.

Correction de l'exercice 15 ▲

Puisque les termes généraux des deux séries sont positifs, il suffit de démontrer que les sommes partielles d'une des séries sont majorées si et seulement si les sommes partielles de l'autre le sont. L'idée est de considérer dans les sommes partielles de $\sum_n u_n$ des blocs dont les indices sont compris entre 2^k et $2^{k+1} - 1$ pour pouvoir comparer aux sommes partielles de la série $\sum_n 2^n u_n$. Pour cela, le point clé est l'encadrement suivant :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi, supposons que $\sum_k 2^k u_{2^k}$ est convergente, et soit M tel que, pour tout K, on a $\sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} \leq M$. Alors, considérons N un entier et fixons K tel que $N \leq 2^{K+1} - 1$. On a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq \sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} \leq M.$$

On en conclut que $\sum_n u_n$ est convergente. Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ est convergente, et soit M tel que, pour tout N, on a $\sum_{n=1}^{N} u_n \leq M$. Alors, pour tout entier K, on a

$$\sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} = u_1 + \sum_{k=0}^{K-1} 2^{k+1} u_{2^{k+1}} \leq u_1 + 2\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq u_1 + 2\sum_{n=1}^{2^K} u_n \leq u_1 + 2M.$$

Ainsi, la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ est convergente.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Supposons d'abord $a > 1$, et prenons $b \in]1, a[$. Posons aussi $v_n = \frac{1}{n^b}$. Alors on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^b}{(n+1)^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Par récurrence, on montre aisément par récurrence sur n que, pour $n \geq n_0$,

$$u_n \leq C v_n$$

avec $C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$. Par comparaison (les séries sont à terme positif), la série de terme général u_n converge puisque la série de terme général v_n converge.

2. Dans le cas où $a < 1$, on procède de même en choisissant cette fois $b \in]a, 1[$. On trouve alors que, pour n assez grand,

$$u_n \geq C v_n.$$

Puisque la série de terme général v_n diverge (cette fois, $b < 1$), la série de terme général u_n diverge.

3. Posons $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^b}$ dont on rappelle qu'elle converge si et seulement si $b > 1$. Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^b = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(1+1/n)}\right)^b.$$

Or,

$$\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)} = \frac{\ln n}{\ln n + O(1/n)} = \frac{1}{1 + O(1/n\ln n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Mettant à la puissance b, on a

$$\left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)}\right)^b = 1 + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Effectuant le produit des deux développements limités, on trouve qu'au premier ordre,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, on trouve le même résultat, alors que la série de terme général u_n est parfois convergente, parfois divergente. Le cas $a = 1$ est bien un cas limite.

4. On a

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La question précédente prouve que la série de terme général w_n converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} w_k \to C$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln(nu_n) - \ln(u_1)$. On en déduit que la suite $(\ln(nu_n))$ converge vers un réel. Passant à l'exponentielle, on en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $nu_n \to \lambda$ c'est-à-dire $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n diverge.

5. On a

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

6. La question précédente prouve que la série de terme général w_n converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} w_k \to C$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln(nu_n) - \ln(u_1)$. On en déduit que la suite $(\ln(nu_n))$ converge vers un réel. Passant à l'exponentielle, on en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $nu_n \to \lambda$ c'est-à-dire $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série converge absolument.

2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.

3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Correction de l'exercice 18 ▲

On va montrer que cette série est absolument convergente. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée par M, et on a :

$$|u_n| \leq \frac{M}{n}\int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}.$$

La série de terme général (u_n) est absolument convergente.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.

2. On écrit que

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Notons U_n, V_n, W_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente (par le critère des séries alternées), (W_n) est divergente (puisque $w_n \sim \frac{-1}{n}$). Donc (U_n) est somme de d'une suite convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.

4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge. Dans le théorème de comparaison de deux séries, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse que les termes généraux gardent le même signe. Une autre conclusion est que $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$, (a_n) tend vers 0, et pourtant $\sum_n u_n$ diverge. Dans le critère des séries alternées, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse (a_n) décroit.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Le développement limité de u_n donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n,$$

où $v_n \sim \frac{-1}{8n^2}$. Maintenant, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$, à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann). La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

2. Faisons un développement limité du terme général u_n au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n,$$

où $v_n = o\left(n^{-3\alpha/2}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série u_n a donc le même comportement que la série de terme général :

$$w_n = -\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n.$$

Maintenant, $w_n \sim_\infty \dfrac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$ qui ne change pas de signe. Autrement dit, le comportement de la série de terme général u_n est le même que celui de la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}$. On en déduit que la série diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ et converge pour $\alpha > 2/3$.

3. Remarquons d'abord que si $\alpha = \beta$, u_n n'est pas défini pour n impair. Supposons donc $\alpha \neq \beta$.

Si $\alpha < \beta$, en factorisant par $(-1)^n n^\beta$ au dénomineateur, on peut écrire $u_n = \dfrac{1}{n^\beta(1+(-1)^n n^{\alpha-\beta})}$. Ainsi, u_n est définie pour $n \geq 2$, et positif ; en outre, $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$. La série converge dans ce cas si et seulement si $\beta > 1$. Si $\alpha > \beta$, le terme dominant n'est plus le même, et on écrit désormais :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha(1+(-1)^n n^{\beta-\alpha})}.$$

On voit ainsi que u_n est bien définie pour $n \geq 2$, et c'est une série alternée. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, en conséquence :

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Il reste ainsi à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On effectue un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part, $v_n \sim_\infty \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$. D'après la règle de comparaison à une série à terme constant, elle converge si, et seulement si, $2\alpha - \beta > 1$. Finalement, pour $0 < \alpha \leq 1$,

si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente). si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

4. Si $\alpha < \beta$, en factorisant par $(-1)^n n^\beta$ au dénomineateur, on peut écrire $u_n = \dfrac{1}{n^\beta(1+(-1)^n n^{\alpha-\beta})}$. Ainsi, u_n est définie pour $n \geq 2$, et positif ; en outre, $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$. La série converge dans ce cas si et seulement si $\beta > 1$.

5. Si $\alpha > \beta$, le terme dominant n'est plus le même, et on écrit désormais :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha(1+(-1)^n n^{\beta-\alpha})}.$$

On voit ainsi que u_n est bien définie pour $n \geq 2$, et c'est une série alternée. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, en conséquence :

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Il reste ainsi à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On effectue un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part, $v_n \sim_\infty \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$. D'après la règle de comparaison à une série à terme constant, elle converge si, et seulement si, $2\alpha - \beta > 1$. Finalement, pour $0 < \alpha \leq 1$,

si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente). si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

6. Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.

7. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

8. si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente).

9. si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

Correction de l'exercice 21 ▲

Pour $|b| \leq 1$, la suite (b^n), qui est bornée, est négligeable devant $2^{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim_{+\infty} 2^{\sqrt{n}}$, et $u_n \sim a^n$. On en déduit alors que, pour $|a| \geq 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 : la série $\sum_n u_n$ est donc divergente ; Pour $|a| < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente car $|u_n| \sim_n |a^n|$, le terme de droite étant le terme général d'une série convergente. Si maintenant $|b| > 1$, alors la suite $(2^{\sqrt{n}})$ est négligeable devant (b^n) (faire le quotient en passant par la notation exponentielle). On en déduit que $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{2^{\sqrt{n}}a^n}{b^n}$. Posons $v_n = \dfrac{2^{\sqrt{n}}|a|^n}{|b|^n}$, et étudions la série $\sum_n v_n$ en appliquant le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplier par la quantité conjuguée), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|}$. Si $|a| < |b|$, alors la série $\sum_n v_n$ converge, et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Si $|a| \geq |b|$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Correction de l'exercice 22 ▲

On commence par distinguer les cas $|y| \leq 1$ et $|y| > 1$.

Si $|y| > 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{x^n}{y^n}$. Si $|x| > |y|$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge. Si $|x| < |y|$, la série converge absolument par comparaison à une série géométrique convergente. Si maintenant $|y| = |x|$, il y a encore deux cas à distinguer. Si $x = y$, on a $u_n = \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \to 1$ et donc le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge. Si $x = -y$, le même raisonnement prouve que $|u_n| \to 1$, et la série est là aussi grossièrement divergente. Si $|y| \leq 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Lorsque $|x| < 1$, on déduit la convergence absolue de la série de terme général u_n. Lorsque $|x| > 1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge. Reste à étudier les cas $x = 1$ et $x = -1$. Si $x = 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, et par comparaison à une série à termes positifs divergente, la série $\sum_n u_n$ diverge. Si $x = -1$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n(1+y^n/n)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{y^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-y)^n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &:= v_n + w_n + z_n. \end{aligned}$$

Or, $\sum_n v_n$ converge (par le critère des séries alternées), $\sum_n w_n$ et $\sum_n z_n$ convergent absolument, donc, si $x=-1$ et $|y|<1$, la série de terme général $\sum_n u_n$ converge.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. C'est plus facile de raisonner en se ramenant à l'étude d'une fonction. Pour cela, on pose

$$f(x)=\frac{1}{(x+n)^\alpha}-\frac{1}{(x+n+1)^\alpha},$$

de sorte que $v_p=f(p)$. Il suffit donc de démontrer que la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$, ce que l'on constate aisément en calculant sa dérivée et en remarquant qu'elle est négative. De plus, il est clair que (v_p) tend vers 0, et donc le critère des séries alternées donne la convergence de $\sum_p v_p$. De plus, par application de ce même critère, le signe de la somme est le même que le signe du premier terme. Ainsi, $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p v_p\geq 0$.

2. On va donc appliquer le critère des séries alternées à la série de terme général u_n. On remarque déjà que, par application du critère des séries alternées, le signe de u_n est le même que celui de $(-1)^n/n^\alpha$. On a donc bien affaire à une série alternée. De plus, on sait que

$$|u_n|\leq\frac{1}{n^\alpha},$$

et donc $(|u_n|)$ tend vers 0. Enfin, on va démontrer que $|u_{n+1}|\leq|u_n|$. Pour cela, on calcule

$$|u_n|-|u_{n+1}|=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+n)^\alpha}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha}=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p v_p.$$

D'après la question précédente, on a bien $|u_n|\geq|u_{n+1}|$.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On écrit successivement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^n (s_k-s_{k-1})v_k\\ &= \sum_{k=1}^n s_k v_k-\sum_{k=1}^n s_{k-1}v_k\\ &= \sum_{k=1}^n s_k v_k-\sum_{k=0}^{n-1} s_k v_{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(v_k-v_{k+1})+s_n v_n-s_0 v_1.\end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que, puisque (s_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors $(s_n v_n)$ converge également vers 0. Il suffit donc de prouver la convergence de la série $\sum_k s_k(v_k-v_{k-1})$. On va prouver la convergence absolue. Pour cela, on remarque que, pour tout $n\geq 1$, si on note M un majorant de la suite $(|s_n|)_n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |s_k(v_k-v_{k+1})| &\leq M\sum_{k=1}^n (v_k-v_{k+1}) \text{ car la suite } (v_n) \text{ est décroissante}\\ &\leq M(v_1-v_{n+1})\\ &\leq Mv_1.\end{aligned}$$

Ainsi, les sommes partielles de $\sum_k |s_k(v_k-v_{k-1})|$ sont majorées, ce qui prouve la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_k s_k(v_k-v_{k-1})$.

3. En utilisant la question précédente, il suffit de prouver que la suite (S_n) définie par

$$S_n=\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

est bornée. Pour cela, on écrit $\sin(k\theta) = \Im m(e^{ik\theta})$ et on utilise la somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right).$$

Mais on a, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{+i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\ &= e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Revenant à S_n, on trouve, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ceci est bien bornée indépendamment de n par $\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors bien sûr $S_n = 0$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On écrit $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ et $\frac{1}{e} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$. On décompose alors $n!e$ en $a_n + b_n$, où :

$$a_n = \sum_{k\leq n} \frac{n!}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}.$$

Observons que a_n est un entier. En outre, si $k \leq n-2$, $n!/k!$ est un entier pair (car il est divisible par $n(n-1)$ qui est pair). On en déduit que a_n est de parité opposée à n, et $\cos(\pi a_n) = (-1)^{n+1}$. Utilisant la formule de trigonométrie habituelle, on obtient $\sin(e\pi n!) = (-1)^{n+1}\sin(\pi b_n)$. Remarquons ensuite que la suite (b_n) est positive, décroissante, et qu'elle tend vers 0 grâce à la majoration :

$$b_n \leq \sum_{p\geq 1} \frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{n}.$$

Il en est de même de la suite $\sin(\pi b_n)$, et donc la série de terme général $\sin(n!e\pi)$ converge par application du criète des séries alternées. Un raisonnement similaire montre qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sin(n!\pi/e) \sim \frac{\pi}{n}.$$

Cette série diverge.

2. Observons d'abord que la série converge absolument si $\alpha > 1$, et diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $I_p = \{n \in^*;\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor = p\}$ puis $v_p = \sum_{n\in I_p} u_n = \sum_{r=0}^{2p} \frac{(-1)^p}{(p^2+r)^\alpha}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement

$$\frac{2p+1}{(p^2+2p)^\alpha} \leq |v_p| \leq \frac{2p+1}{p^{2\alpha}},$$

d'où l'on tire que $|v_p| \sim \frac{2}{p^{2\alpha-1}}$. Lorsque $\alpha \leq 1/2$, la suite (v_p) ne tend pas vers 0, et le critère de Cauchy ne peut pas être respecté pour la série $\sum u_n$ qui est donc divergente. Si maintenant $\alpha > 1/2$, on a au voisinage de $+\infty$:

$$v_p = \frac{2(-1)^p}{p^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

Ceci prouve que la série de terme général v_p est (semi-)convergente. Posons enfin, pour n et p des entiers, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_p = \sum_{k=1}^{p} v_k$. Si $p_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, on a alors

$$\begin{aligned} |U_n - V_{p_n}| &= \left| u_{n+1} + \cdots + u_{p_n^2+2p_n} \right| \\ &= |u_{n+1}| + \cdots + |u_{p_n^2+2p_n}| \\ &\leq |v_{p_n}| \end{aligned}$$

(remarquons que tous les termes qui apparaissent ci-dessus sont de même signe). On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ pour prouver que la série converge !

Correction de l'exercice 26 ▲

Dans tous les cas, on va comparer à une intégrale.

1. On doit séparer les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

l'inégalité de gauche étant encore valable pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n, et celle de droite pour k allant de 2 à n. En rajoutant 1 à l'inégalité de droite, on trouve finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Puisque $\alpha < 1$, $n^{1-\alpha} \to +\infty$ et on en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est cette fois croissante. Le raisonnement est strictement identique, mais on doit inverser le sens des inégalités. On obtient exactement le même résultat.

2. Le raisonnement est toujours identique, mais cette fois on doit intégrer la fonction $\frac{1}{x}$ dont une primitive est $\ln x$. On en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} \ln n.$$

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On intègre :

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right).$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on trouve que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} a^{1-\alpha}.$$

2. On va comparer la somme à une intégrale. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ étant décroissante, on en déduit que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N. On trouve :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que

$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \to 1$$

c'est-à-dire

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Correction de l'exercice 28 ▲

On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Puisque la fonction ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt.$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n et, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_1^n \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln(t)dt.$$

Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x\ln x - x$, on trouve que

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

On divise par $n\ln n$ pour prouver que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n\ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \to 1.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \frac{n\ln(n+1)+\ln(n+1)}{n\ln n} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$$

et ceci quelque soit la valeur de β. Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. On va comparer cette fois à la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a en effet

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n.$$

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général u_n diverge.

3. Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente. Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}2}\right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}$ et on a même que pour tout entier $n \geq 2$

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$. Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

4. Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente.

5. Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}2}\right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}$ et on a même que pour tout entier $n \geq 2$

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$.

6. Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^{n} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

Correction de l'exercice 30 ▲

Pour $k \geq 1$, puisque la fonction $\ln^2$ est croissante sur $[1,+\infty[$, on a

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1).$$

En sommant ces inégalités de $k = 1$ jusque $k = n$, on trouve

$$u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt \leq u_{n+1} - \ln^2(1),$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_1^{n} \ln^2(t)dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt.$$

On calcule ensuite $\int_1^x \ln^2(t)dt$ par une intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln^2(t)dt &= \left[t\ln^2(t)\right]_1^x - 2\int_1^x \ln(t)dt \\ &= x\ln^2(x) - 2[t\ln t - t]_1^x \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln x + 2x - 2.\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$n\ln^2(n) - 2n\ln n + 2n - 2 \leq u_n \leq (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2.$$

Ceci prouve que $u_n \sim_{+\infty} n\ln^2(n)$. Ainsi, $\frac{1}{u_n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$. Mais la série $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ est convergente (c'est une série de Bertrand convergente, pour prouver la convergence, on compare à une intégrale, et on utilise que $\int_2^x \frac{dt}{t\ln^2 t} = -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$). Donc la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

Correction de l'exercice 31 ▲

Posons, pour $a > 0$, $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2}dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^{N} \frac{a}{a^2+x^2}dx.$$

On calcule ces intégrales et on trouve

$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 32 ▲

Les fonctions $g : x \mapsto f(e^{-x})$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont décroissantes et positives. Ainsi, la convergence des séries $\sum_n g(n)$ et $\sum_n h(n)$ sont équivalentes respectivement à la convergence des intégrales impropres $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} h(t)dt$. Avec les notations de l'exercice, la convergence de $\sum_n u_n$ est donc équivalente à la convergence de $\int_1^{+\infty} f(e^{-t})dt$ et celle de $\sum_n v_n$ à la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$. Mais, en effectuant le changement de variables $e^t = u$, de sorte de $e^t dt = u \implies dt = du/u$, on trouve

$$\int_1^X f(e^{-t})dt = \int_e^{e^X} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) du.$$

Ainsi, les deux intégrales impropres ont la même nature. Il en est de même pour les deux séries.

Correction de l'exercice 33 ▲

On va comparer à une intégrale chaque terme $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$. Ce ne semble pas si facile ! Mais on peut remarquer que, pour $n \geq 2$,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On en déduit, pour tout $N \geq 2$, que

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_N} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)S_1^{\alpha-1}}.$$

La série est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle est convergente.

Correction de l'exercice 34 ▲

On a affaire à une série télescopique un peu compliquée. Les simplifications se font sur l'écriture de 3 termes consécutifs. Précisément, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On prouve donc que la série converge, et que sa somme fait : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. On aurait aussi pu séparer la série en deux séries télescopiques, en écrivant

$$u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Correction de l'exercice 35 ▲

1. La première somme ne pose pas de problèmes :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}+e=2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en n^2. Pour qu'il se simplifie bien avec le $n!$, le plus commode est de l'écrire

$$n^2=n(n-1)+n$$

de sorte que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2}{n!}=\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e+e-2e=0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+3\sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 3}\frac{1}{(n-3)!}+\sum_{n\geq 2}\frac{3}{(n-2)!}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= 5e.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36 ▲

1. Remarquons d'abord par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $f(t)=\ln(1+t)$ est :

$$f^{(n)}(t)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cette fonction entre 0 et 1. Remarquons que si $t\in[0,1]$, on a :

$$\left|f^{(n)}(t)\right|\leq (n-1)!$$

On a donc :

$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leq\frac{1}{n},$$

ce qui en remplaçant les dérivées successives en zéro donne :

$$\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leq\frac{1}{n}.$$

Faire tendre n vers $+\infty$ donne le résultat.

2. Avec l'indication, il vient :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)dt=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}dt.$$

Or, $\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$, et

$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt\right|\leq\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}.$$

Il vient $|U_n - \ln 2| \leq \dfrac{1}{n+1}$, ce qui redonne bien le résultat de la première question.

Correction de l'exercice 37 ▲

Le plus simple est d'utiliser la formule suivante :

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(k+1) - \arctan(k),$$

qu'on peut prouver par exemple en appliquant la fonction tangente des deux côtés de l'égalité et utiliser la formule $\tan(a-b) = \ldots$. On en déduit, par procédé standard d'élimination :

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(1) \to \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 38 ▲

1. On écrit

$$\begin{aligned} |nv_n| &= n\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} n|u_k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} k|u_k|. \end{aligned}$$

Le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 comme reste d'une série numérique convergente. On en déduit que (nv_n) tend vers 0.

2. Soit $N \geq 1$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

Si $k \leq N$, le terme u_k apparait k fois dans les sommes du membre de droite. Si $k > N$, il apparait N fois. On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} nu_n + N\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{N} nu_n + Nv_{N+1}.$$

Puisque d'après la question précédente, $Nv_{N+1} \to 0$, on en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que la série de terme général v_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n.$$

3. Posons $u_n = r^n$. On a bien $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n n|u_n|$ qui sont deux séries numériques convergentes. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{n\geq 1} nr^n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

avec

$$v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} r^k = \frac{r^n}{1-r}.$$

On en déduit

$$\sum_{n\geq 1} nr^n = \sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Correction de l'exercice 39 ▲

On remarque d'abord que la série est convergente. Il s'agit d'une série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ où $a_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$ est une suite décroissante vers 0. Notons S_n la somme partielle d'ordre n de cette série et S cette somme. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et on sait que S est encadré par deux sommes partielles consécutives. Plus précisément ici, en tenant compte du fait que $S_{2n-1} \leq S_{2n}$, on a $S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}$. Il suffit donc de calculer S_{2n-1} et S_{2n} jusqu'à ce que $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n\ln(2n+1)} \leq 10^{-5}$. Ceci donne : import math S=-1/math.log(2) T=S+1/(2*math.log(3)) n=2 while (T-S)<0.00001 : S=T-1/((2*n-1)*math.log(2n)) T=S+1/((2*n)*math.log(2*n+1)) n=n+1 print T,S

Correction de l'exercice 40 ▲

1. Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{5^n}$$

et que le membre à droite de cette inégalité et le terme général d'une série convergente. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert (ce qui est légitime puisqu'on a affaire à une série à termes positifs). Observant que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{25} \times \frac{2k-1}{2k+1} \to \frac{1}{25}$$

on en déduit que la série de terme général u_n est convergente.

2. L'équation précédente montre qu'en réalité

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}.$$

Par récurrence, on obtient que

$$u_{n+k+1} \leq 25^{-k} u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$R_n \leq u_{n+1} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 25^{-k} = \frac{25}{24} u_{n+1}.$$

3. Dès $n = 2$, on a $R_n < 0,001$. Une valeur approchée à 10^{-3} près est donc donnée par $u_1 + u_2 \simeq 0,202$.

Correction de l'exercice 41 ▲

1. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, on a, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}. \tag{1}$$

Sommant cette relation pour k allant de 2 à n, puis ajoutant 1, on obtient :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}.$$

Calculant l'intégrale, on trouve :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

On en déduit que $H_n / \ln n \to 1$, et donc $H_n \sim \ln n$.

2. Nous avons

$$\begin{aligned} v_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $v_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2(n+1)^2}$. On en déduit que la série $\sum_n v_n$ est convergente. De plus, revenant à la définition $v_n = u_{n+1} - u_n$, on voit que les sommes partielles se télescopent et que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = u_{n+1} - u_1.$$

Ainsi, la suite (u_n) est convergente.

3. On reprend la même méthode que pour prouver la divergence de la série harmonique, à savoir que l'on compare à une intégrale. En effet, pour tout k, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$

Sommant cette inégalité pour k allant de n à $+\infty$, on trouve

$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{(n-1)}.$$

On trouve finalement $R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

4. Soit donc w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$. On sait que $(w_n) \to 0$. D'autre part, on a :

$$t_n = w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après la question 2., soit $t_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On applique le critère de comparaison des séries à termes positifs : la série de terme général t_n est convergente, et on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left(w_{k+1} - w_k\right) \sim_{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2}.$$

Or, puisque (w_n) tend vers 0, on a

$$\sum_{k=n}^{N} \left(w_{k+1} - w_k\right) = w_{N+1} - w_n \to -w_n \text{ pour } N \to +\infty.$$

Ainsi, utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$-w_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n}, \text{ ce qui s'écrit aussi } w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci est bien le résultat demandé.

Correction de l'exercice 42 ▲

1. On sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité entre $k-1$ et k. On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

soit encore

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

Puisque

$$\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \to 1,$$

on en déduit le résultat demandé.

2. On sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité entre $k-1$ et k.

3. On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

soit encore

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

Puisque

$$\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \to 1,$$

on en déduit le résultat demandé.

4. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t) \sin\big((2n+1)t/2\big)dt = & \quad \frac{2}{2n+1} f(0) - \frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) f(\pi) \\ & + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos\big((2n+1)t/2\big)dt.\end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\frac{2}{2n+1} f(0) - \frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) f(\pi) \to 0$$

(produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0). De plus, on a aussi

$$\left| \int_0^\pi f'(t) \cos\big((2n+1)t/2\big)dt \right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$

et donc on a

$$\int_0^\pi f(t) \sin\big((2n+1)t/2\big)dt \to 0.$$

5. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0, \pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + \Re e\left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Une petite formule de trigo donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$

ce qui finalement donne le résultat.

6. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= 0 - \left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt \\ &= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n - b}{n^2}. \end{aligned}$$

Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b=-1$ et $a=1/2\pi$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

7. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$

avec $f(t)=\frac{at^2+bt}{2\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t\in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2(2at+b)\sin(t/2)-(at^2+bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \\ &= \frac{2(2at+b)(t/2+o(t^2))-(at^2+bt)(1-t^2/8+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} \\ &= \frac{at^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} \to a. \end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

8. On a

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$$

d'après la première question.

Correction de l'exercice 43 ▲

L'idée est qu'une fonction vérifiant une telle propriété décroit très vite vers 0 en $+\infty$, plus vite que n'importe quelle fonction e^{-Mx}. Concrètement, avec des quantificateurs, cela se traduit comme suit. Soit $M>0$. Alors il existe $A>0$ tel que, pour tout $x\geq A$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)}\leq -M$. Pour $A\leq x\leq y$, on a en intégrant puis en passant à l'exponentielle, que $f(y)\leq f(x)e^{-M(y-x)}$. Si on fixe $x=A$ et si $y=n$ est un entier, on obtient que $0\leq f(n)\leq Ce^{-Mn}$, où C est une constante. Ceci prouve que la série est convergente. Cherchons désormais un équivalent du reste. Pour $n\geq A$ et $p\geq 0$, on a

$$f(n+p)\leq f(n)e^{-Mp}.$$

Si on somme ceci pour p de 0 à $+\infty$, on trouve

$$f(n)\leq R_n \leq f(n)\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-pM} = \frac{f(n)}{1-e^{-M}}.$$

Fixons désormais $\varepsilon>0$. Si M est choisi de sorte que $\frac{1}{1-e^{-M}}\leq 1+\varepsilon$, alors on peut trouver A tel que, pour tout $n\geq A$, on a

$$f(n)\leq R_n \leq (1+\varepsilon)f(n).$$

Ceci prouve que $f(n)\sim_{+\infty} R_n$.

Correction de l'exercice 44 ▲

1. Supposons pour fixer les idées que n est pair. Alors R_n, somme d'une série alternée dont le premier terme est négatif, est négatif. De même, R_{n+1} est positif. Il vient

$$|R_n| = -\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k \text{ et } |R_{n+1}| = \sum_{k=n+2}^{+\infty}(-1)^k u_k.$$

On en déduit que

$$|R_n| + |R_{n+1}| = -(-1)^{n+1} u_{n+1} = u_{n+1}.$$

La démonstration est complètement similaire si n est impair.

2. Supposons à nouveau que $n = 2p$ est pair. D'après ce qui a été obtenu à la question précédente,

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| - |R_n| &= \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \\ &= -u_{n+1} + 2u_{n+2} - 2u_{n+3} + 2u_{n+4} - \cdots. \end{aligned}$$

Écrivons encore cette dernière égalité en regroupant les termes différemment :

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| - |R_n| &= (-u_{n+1} + 2u_{n+2} - u_{n+3}) + (-u_{n+3} + 2u_{n+4} - u_{n+5}) + \cdots \\ &= -\sum_{k=p}^{+\infty} (u_{2k+1} - 2u_{2k+2} + u_{2k+3}) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, chaque terme $u_{2k+1} - 2u_{2k+2} + u_{2k+3}$ est positif. C'est donc que $|R_{n+1}| - |R_n| \leq 0$. La preuve serait identique si n était impair. Donc la suite $(|R_n|)$ est décroissante. Remarquons que la preuve n'est pas complètement terminée. Il faut encore justifier que l'on peut regrouper les termes comme on l'a fait. Faites-le (en traitant d'abord les restes partiels) !

3. D'après les deux questions précédentes, on a

$$u_{n+1} \leq 2|R_n| \text{ et } 2|R_{n+1}| \leq u_{n+1}$$

ce qui peut se réécrire en

$$\frac{u_{n+1}}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_n}{2}.$$

Sachant que u_{n+1}/u_n tend vers 1, on en déduit que $|R_n| \sim_{+\infty} \frac{u_n}{2}$. Maintenant, on sait aussi que $R_n = (-1)^{n+1}|R_n|$. On en déduit le résultat demandé.

Correction de l'exercice 45 ▲

Prenant les exemples de $a_n = 1$ ou $a_n = 1/(n+1)$, on observe que la série de terme général b_n semble diverger. Prouvons-le (en s'inspirant de la preuve élémentaire de la divergence de la série harmonique). Soit n arbitrairement grand. Soit $p \geq n$ tel que $S_p \leq 2S_n$ et $S_{p+1} > 2S_n$. Un tel p existe car la série est divergente et est unique. Alors

$$\sum_{k=n}^{p} b_k = \sum_{k=n}^{p} \frac{a_{k+1}}{S_k} \geq \sum_{k=n}^{p} \frac{a_{k+1}}{2S_n} = \frac{S_{p+1} - S_n}{2S_n} \geq \frac{1}{2},$$

alors que cette quantité devrait pouvoir être rendu arbitrairement petite lorsque n est grand si la série convergeait.

Correction de l'exercice 46 ▲

1. On écrit $\sum_{n=1}^{N} y_n = x_{N+1} - x_1$ (la somme est télescopique). Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^{N} y_n)$ converge si et seulement si la suite (x_N) converge.

2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n -il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente.

3. On écrit $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Puisque la série $\sum_n v_n$ converge, d'après la première question la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers un réel l, et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n)

converge vers le réel e^l qui est strictement positif. Revenant à la définition de (u_n), ceci donne le résultat avec $C = e^{-l}$.

Correction de l'exercice 47 ▲

1. On va faire un développement limité de v_n. Pour cela, on l'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \beta \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général v_n converge donc si et seulement si $\beta = -\alpha$.

2. On choisit donc $\beta = -\alpha$ et on remarque que la somme partielle de la série de terme général v_n correspond à une somme télescopique de $\ln(n^\beta u_n)$. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln(n^\beta u_n) - \ln(u_1).$$

Puisque la série de terme général v_n converge, on en déduit que la suite $\left(\ln(n^\beta u_n)\right)$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Par composition des limites, $(n^\beta u_n)$ converge vers $A = e^l$. Autrement dit, $u_n \sim_{+\infty} An^\alpha$.

Correction de l'exercice 48 ▲

On a

$$\ln(P_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$

Or,

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

On somme ceci pour k allant de 2 jusque n. Utilisant la convergence de la série $\sum_k \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ (par le critère des séries alternées) et de la série $\sum_k O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ (par convergence absolue), ainsi que l'estimation classique des sommes partielles de la série harmonique, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\ln(P_n) = -\frac{1}{2}\ln n + \lambda + o(1).$$

Prenant l'exponentielle, il vient

$$P_n = \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}} \exp\left(o(1)\right)$$

ce qui prouve le résultat.

Correction de l'exercice 49 ▲

1. La fonction $x \mapsto \sin x$ envoie $]0,\pi[$ dans $]0,1] \subset]0,\pi[$. On en déduit que $u_n \in]0,1]$ pour tout $n \geq 1$. En outre, la fonction sin est croissante sur $]0,1] \subset]0,\pi/2]$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone, et on a $\sin x \leq x$, ce qui entraîne que la suite est décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers une solution de $\sin x = x$ dans $[0,\pi]$: il n'y qu'une seule solution à cette équation, 0, et donc la suite (u_n) converge vers 0.

2. Puisque $u_n \to 0$, $\sin u_n \sim u_n$ et donc $u_{n+1}/u_n \sim 1$. Ceci donne encore :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n} = 2.$$

3. Puisque u_n tend vers 0, il est légitime de calculer le développement limité de $\sin u_n$ quand n tend vers $+\infty$:

$$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3).$$

On en déduit que

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} = \frac{1}{6} + o(1),$$

ce qui est le bon résultat.

4. On met tout au même dénominateur, et on factorise :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}} \frac{(u_n + u_{n+1})}{u_{n+1}} \\ &\sim \frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n^3} \frac{(u_n + u_{n+1})}{u_n} \\ &\sim \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. Posons $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. La question précédente dit que $v_n \sim 1/3$. Par la règle de comparaison des sommes partielles des séries divergentes à terme positif, on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) \sim_{N\to\infty} \sum_{0}^{N-1} \frac{1}{3} = \frac{N}{3}.$$

Maintenant, la somme qui apparait à gauche est télescopique, et on obtient :

$$\frac{1}{u_N^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{N}{3}.$$

Prenant la racine carrée, et par théorème de composition des limites, on obtient bien le résultat demandé !

Correction de l'exercice 50 ▲

Notons S_n la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Par le critère des séries alternées,

$$S_{2n-1} < \cos(1) < S_{2n} = S_{2n-1} + \frac{1}{(4n)!}.$$

On multiplie ces deux inégalités par $(4n-2)!$ pour trouver

$$(4n-2)!S_{2n-1} < (4n-2)!\cos(1) < (4n-2)!S_{2n-1} + \frac{1}{4n(4n-1)}.$$

Posons $N = (4n-2)!S_{2n-1}$ qui est un entier. On a donc

$$N < (4n-2)!\cos(1) < N+1.$$

Or, si $\cos(1)$ était rationnel et s'écrivait donc p/q, pour n assez grand, $(4n-2)!\cos(1)$ serait entier (car $(4n-2)!$ est un multiple de q si $4n-2 \geq q$). $(4n-2)!\cos(1)$ serait donc un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. C'est absurde !